# CdS Magistrale in Matematica
# Percorso di Eccellenza
# Offerta Formativa Coorte 2024/25

<u>Semestre</u>: 2° SEMESTRE, I ANNO.

| **Settore** | **Titolo** |
|---|---|
| MATH-01/A | Complessità di Kolmogorov |
| MATH-02/A | Un'Introduzione alla Teoria dei Caratteri |
| MATH-02/B | Distribuzioni e Foliazioni: Teorema di Frobenius |
| MATH-02/B | Varietà con Bordo e Teorema di Stokes |
| MATH-03/B | Passeggiate Aleatorie: Metodi Analitici e Computazionali |
| MATH-04/A | La Relatività Ristretta in Meccanica Analitica |
| MATH-05/A | Metodi Matriciali per l'Analisi delle Reti Complesse |
| MATH-06/A | Problemi di Programmazione Lineare Intera Mista e Varianti con Inesattezza sui Dati |

<u>Semestre</u>: 1° SEMESTRE, II ANNO.

| **Settore** | **Titolo** |
|---|---|
| MATH-01/A | Logiche Probabilistiche |
| MATH-02/A | Gruppi Infiniti |
| MATH-02/B | Coomologia di de Rham |
| MATH-02/B | Introduzione alla Geometria Algebrica |
| MATH-02/B | Teoria Geometrica del Controllo |
| MATH-03/A | Analisi Convessa |
| MATH-03/A | Sistemi Dinamici e Applicazioni |
| MATH-03/B | Operatori Non Locali in Probabilità |
| MATH-05/A | Introduzione al Calcolo Frazionario |
| MATH-05/A | Risoluzione Numerica di PDE di Avvezione-Reazione-Diffusione Dipendenti dal Tempo |
| MATH-06/A | Varianti NP-Difficili di Problemi di Ottimizzazione su Grafi |

<u>Semestre</u>: 2° SEMESTRE, II ANNO.

| **Settore** | **Titolo** |
|---|---|
| MATH-01/A | Dualità di Stone-Gelfand |
| MATH-01/B | Argomentazione e Dimostrazione in Matematica |
| MATH-02/A | Teoria Computazionale dei Gruppi |
| MATH-02/B | Curve Algebriche Complesse e Superfici di Riemann |
| MATH-02/B | Geometria Simplettica |
| MATH-02/B | Introduzione alla Geometria Differenziale Complessa |
| MATH-02/B | Teoria di Hodge |
| MATH-03/A | Trasformate Integrali e Applicazioni |
| MATH-03/B | Applicazioni della Probabilità in Data Science |
| MATH-03/B | Processi di Punto e Applicazioni |
| MATH-04/A | Propagazione per Onde |
| MATH-05/A | Metodi agli Elementi Finiti per Equazioni alle Derivate Parziali Ellittiche |

**CdS Magistrale in Matematica**
**Percorso di Eccellenza**
**Offerta Formativa Coorte 2024/25**

# Descrizione dei Corsi

## Settore MATH-01/A: Logica Matematica

### Complessità di Kolmogorov

Docenti: L. Spada

Descrizione: *La complessità di Kolmogorov di una stringa è data dalla lunghezza del più breve programma che dato in input a una macchina di Turing produce quella stringa. Questo concetto è alla base della teoria algoritmica dell'informazione, una branca della matematica che combina metodi di Teoria dell'Informazione, Computabilità e Probabilità. Lo studente approfondirà lo studio delle basi della teoria della Computabilità, svilupperà varie definizione di "randomness" (Kolmogorov, Chatin e Martin-Löf) e approfondirà alcuni risultati fondamentali in questo ambito.*

Testi di Rifermento:

- Li, Ming; Vitányi, An Introduction to Kolmogorov Complexity and Its Applications, Springer, 1997,
- Gregory Chaitin, Teoria algoritmica della complessità, Torino, Giappichelli, 2006,
- Gregory Chaitin, Alla ricerca di Omega, Milano, Adelphi, 2007,
- Dispense del docente

Semestre: 2° SEMESTRE, I ANNO.

## Logiche Probabilistiche

Docenti: S. Lapenta,

Descrizione: *Il corso introduce alcune logiche probabilistiche, esplorando formalismi per il ragionamento incerto basati su probabilità. Vedremo tre sistemi logici: due basati su logica classica ed il terzo basato su logiche non-classiche. Analizzeremo gli aspetti sintattici e semantici di questi sistemi.*

Testo di Rifermento:

- Ognjanović, Rašković e Marković. Probability Logics, Springer, 2016,
- Flaminio, Godo e Marchioni, Reasoning About Uncertainty of Fuzzy Events: An Overview. Understanding Vagueness-Logical, Philosophical, and Linguistic Perspectives, P. Cintula et al. (Eds.) 2011.

Semestre: 1° SEMESTRE, II ANNO.

## Dualità di Stone-Gelfand

Docenti: S. Lapenta, L. Spada

Descrizione: *la dualità di Stone è un risultato fondamentalmente che ha mostrato come algebra e topologia possano essere viste in alcuni casi come due facce della stessa medaglia. Sotto questo nome ormai ricadono molte altre dualità importanti come quelle di Gelfand, Yosida, Kakutani, Pontryagin, etc. Gli studenti approfondiranno lo studio di queste dualità da un punto di vista unitario e ne vedranno applicazioni alla geometria e all'analisi.*

Testo di riferimento:

- P. Johnstone, Stone spaces, Cambridge University Press, 1982.

Semestre: 2° SEMESTRE, II ANNO.

## Settore MATH-01/B: Didattica e Storia della Matematica

### Argomentazione e Dimostrazione in Matematica

Docenti**:** Cristina Coppola, Annamaria Miranda

Descrizione: *Il corso prevede lo studio di alcune ricerche in educazione matematica su argomentazione e dimostrazione e il loro mutuo rapporto, con collegamenti ad aspetti linguistici. Si approfondiranno alcuni problemi didattici, anche con l'uso delle tecnologie.*

Testi di Riferimento:

- Argomentare e dimostrare come problema didattico, M. A. Mariotti; Educazione matematica, lingua, linguaggi, P. L. Ferrari.

Semestre: 2° SEMESTRE, II ANNO.

## Settore MATH-02/A: Algebra

### Un’Introduzione alla Teoria dei Caratteri

Docente: Maria Tota

Descrizione: *La teoria dei caratteri fornisce un potente strumento per dimostrare teoremi sui gruppi finiti, ma è anche interessante di per sé. Dopo alcune premesse, studieremo le proprietà dei caratteri e come tali proprietà riflettono la struttura del gruppo.*

Testi di riferimento:

- M. Curzio, P. Longobardi, M. Maj, Lezioni di Algebra, Liguori, 1994, I ristampa 1996, II Ed., 2014.
- J. Gordon, M. Liebeck, Representations of Characters and Groups, Cambridge University Press, 2003, virtual publishing.

Semestre: 2° SEMESTRE, I ANNO.

## Gruppi Infiniti

Docente: Costantino Delizia

Descrizione: *Obiettivo di questo corso è di approfondire alcune tematiche in teoria dei gruppi infiniti. In particolare, verranno studiate classi di gruppi con proprietà su sottogruppi importanti e gruppi con condizioni finitarie. Verranno illustrati risultati classici e moderni, metodi, esempi e costruzioni della teoria.*

Testi di riferimento:

- M. R. Dixon, L. A. Kurdachenko, I. Ya. Subbotin, Infinite Groups: A Roadmap to Selected Classical Areas, Chapman & Hall, 2023.
- D. J. S. Robinson, Finiteness Conditions and Generalized Soluble Groups, Springer-Verlag New York Berlin, Heidelberg, 1972.
- D. J. S. Robinson, A Course in the Theory of Groups, Graduate Texts in Mathematics, II ed, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, 1996.

Semestre: 1° SEMESTRE, II ANNO.

## Teoria Computazionale dei Gruppi

Docente: Carmine Monetta

Descrizione: *L'obiettivo di questo corso è di introdurre alcune metodologie computazionali in teoria dei gruppi, facendo uso del sistema di algebra computazionale noto come GAP ("Groups, Algorithms and Programming"). Dopo un'introduzione al software e ai principali algoritmi su cui esso si basa, ci si concentrerà sull'implementazione di algoritmi per testare diverse congetture in algebra.*

Testi di riferimento:

- GAP - Groups, Algorithms, Programming - a System for Computational Discrete Algebra (https://www.gap-system.org/).
- D.F. Holt, B. Eick, and E.A. O'Brien, Handbook of Computational Group Theory (1st ed.). Chapman and Hall/CRC, 2005.

Semestre: 2° SEMESTRE, II ANNO.

# Settore MATH-02/B: Geometria

## Coomologia di de Rham

Docente: Chiara Esposito

Descrizione: *La coomologia di de Rham è uno strumento usato in topologia algebrica per studiare le varietà differenziabili. Essa risulta essere un'invariante topologico che conta il "numero di buchi" della varietà. L'obiettivo di questo corso sarà il calcolo della coomologia di de Rham relativa ad esempi concreti di varietà.*

Testo di riferimento:

- F. D'Andrea, Varietà Differenziabili, Esculapio.

Semestre: 1° SEMESTRE, II ANNO.

## **Curve Algebriche Complesse e Superfici di Riemann**

Docente: Fabrizio Pugliese

Descrizione: *Quest'attività didattica è un'introduzione "classica" alla geometria algebrica, attraverso lo studio delle curve algebriche complesse e del loro legame con le "superfici di Riemann", cioè la varietà complesse 1-dimensionali (com'è noto, le superfici di Riemann compatte coincidono, essenzialmente, con le curve algebriche piane complesse). Un vantaggio di quest'approccio "concreto" alla geometria algebrica è far vedere allo studente come analisi, topologia e geometria possano interagire fra loro, e come nozioni a prima vista slegate siano in realtà intimamente connesse; esemplare, in tal senso, è il teorema di Riemann-Roch, che lega il genere della superficie di Riemann (una nozione topologica) ai divisori delle funzioni meromorfe definite su di essa (tale teorema verrà studiato al termine dell'attività). Un'altro esempio dell'interazione fra analisi e algebra è la legge di gruppo su una cubica non singolare, interpretata in termini della struttura di gruppo di Lie del corrispondente toro complesso; anche questo verrà studiato nel corso dell'attività, così come si studieranno alcune altre proprietà di base delle curve algebriche (molteplicità d'intersezione e teorema di Bezout; analisi delle singolarità col metodo di Newton-Puiseux; scioglimento delle singolarità, ecc.).*

Testi di riferimento:

- R. Miranda, Algebraic Curves and Riemann Surfaces, American Mathematical Society.
- F. Kirwan, Complex Algebraic Curves, Cambridge University Press.

Semestre: 2° SEMESTRE, II ANNO.

## Distribuzioni e Foliazioni: Teorema di Frobenius

Docente: Alfonso Tortorella

Descrizione: *Una foliazione F su una varietà M è una partizione di M in sottovarietà immerse connesse, chiamate foglie di F, che localmente, intorno ad ogni punto di M, appare come le fibre di una sommersione suriettiva. Una distribuzione (tangente)} D su una varietà M consiste dell'assegnazione di un sottospazio* $D_x$ *in* $T_xM$*, per ogni x in M. Data una foliazione F su M, gli spazi tangenti alle foglie di F danno luogo ad una distribuzione TF su M. Una distribuzione che si origina in questo modo da una foliazione si dice integrabile. Poiché non tutte le distribuzioni sono integrabili, risulta naturale chiedersi come caratterizzare le distribuzioni che si "integrano" in una foliazione? Questo interrogativo, che si incontra anche in relazione con la soluzione di equazioni differenziali, trova una risposta sistematica attraverso il Teorema di Frobenius.*

Testi di riferimento:

- J. M. Lee, Introduction to Smooth Manifolds, 2nd Edition, Springer, 2013.
- P. W. Michor, Topics in Differential Geometry, AMS.
- I. Moerdijk, J. Mrčun, Introduction to Foliations and Lie Groupoids, Cambridge University Press.
- Vaisman, Lectures on the Geometry of Poisson Manifolds.

Semestre: 2° SEMESTRE, I ANNO.

## Geometria Simplettica

Docente: Chiara Esposito

Descrizione: *La geometria simplettica è una branca della geometria differenziale che studia le varietà dette simplettiche, cioè varietà differenziabili equipaggiate con una 2-forma chiusa e non degenere. Lo studio della geometria simplettica è motivato dalla meccanica hamiltoniana, in cui lo spazio delle fasi di certi sistemi ha una struttura di varietà simplettica.*

Testo di riferimento:

- A. Canas da Silva, Lectures on Symplectic Geometry, Springer.

Semestre: 2° SEMESTRE, II ANNO.

## Introduzione alla Geometria Algebrica

Docente: Luca Vitagliano

Descrizione: *La Geometria Algebrica è forse il ramo meglio sviluppato, più avanzato e con le maggiori applicazioni nel panorama della Geometria contemporanea. La Geometria Algebrica classica studia le varietà affini e proiettive, ossia (le componenti irriducibili de) gli spazi di soluzioni di equazioni polinomiali nello spazio affine e nello spazio proiettivo e si fonda sulla corrispondenza tra insiemi algebrici e ideali dell'anello dei polinomi. La Geometria Algebrica moderna astrae dalla nozione piuttosto concreta di insieme algebrico la nozione di schema. Gli schemi sono spazi sufficientemente generali da catturare moltissime situazioni interessanti in Matematica. Lo scopo del corso è fornire un'introduzione alle nozioni di insieme algebrico, varietà affine e proiettiva, nelle lezioni frontali, per condurre gradualmente lo studente fino alla nozione più sofisticata di schema nella parte di studio autonomo.*

Testi di riferimento:

- R. Hartshorne, Algebraic Geometry, Springer.
- Dispense fornite dal docente.

Semestre: 1° SEMESTRE, II ANNO.

## Introduzione alla Geometria Differenziale Complessa

Docente: Alfonso Tortorella

Descrizione: *L'obiettivo è introdurre e studiare le varietà complesse. Formalmente, la loro definizione è simile a quella delle varietà reali lisce: basta dire che ora le carte di coordinate prendono valori in aperti di* $C^n$ *(anziché* $R^n$*) e le mappe di transizione sono olomorfe (anziché lisce). Nonostante la somiglianza formale, il mondo delle varietà differenziali reale e quello delle varietà complesse sono totalmente diversi: tipicamente "sostituendo C ad R" nelle definizioni si ottengono nozioni più restrittive e rigide. Come esempi di ciò si consideri che: (1) tutte le varietà complesse sono orientate canonicamente. (2) sulle varietà complesse compatte le uniche funzioni olomorfe (globali) sono le costanti e lo spazio vettoriale dei campi vettoriali olomorfi è finito dimensionale (3) in* $C^n$ *non ci si sono sottovarietà complesse compatte di dimensione > 0. (4) sulle varietà complesse non esiste nulla di analogo alle funzioni a bernoccolo o alle partizioni dell'unità.*

Testi di riferimento:

- Griffiths, and Harris, Principles of Algebraic Geometry, Wiley.
- Huybrechts, Complex Geometry: an Introduction, Springer.

Semestre: 2° SEMESTRE, II ANNO.

## Teoria di Hodge

Docente: Antonio De Nicola

Descrizione: *In questo corso si studierà la teoria di Hodge, una delle più belle e profonde scoperte della matematica del XX secolo. Essa permette di studiare i gruppi di coomologia di una varietà differenziabile usando una equazione differenziale alle derivate parziali. L'osservazione chiave è che, data una metrica Riemanniana sulla varietà, ogni classe di coomologia ammette un rappresentante canonico, una forma differenziale che si annulla sotto l'azione dell'operatore Laplaciano di Hodge della metrica. Equivalentemente tali forme, dette armoniche, si annullano sotto l'azione del differenziale di de Rham e del suo aggiunto rispetto ad un opportuno prodotto scalare. Si osservi che mentre il Laplaciano dipende dalla metrica usata, la coomologia è un concetto che dipende solo dal tipo di omotopia della varietà. La teoria porta dunque alla luce un profondo legame tra l'analisi, la geometria differenziale e la topologia di una varietà differenziabile.*

Testi di riferimento:

- S. Morita, Geometry of differential forms, AMS, 2001. (Capitoli 3-4)
- F. Warner, Foundations of differentiable manifolds and Lie groups, Springer, 1983.

Semestre: 2° SEMESTRE, II ANNO.

## Teoria Geometrica del Controllo

Docente: Fabrizio Pugliese

Descrizione: *La teoria del controllo è un vasto ramo della matematica applicata che studia come condizionare l'evoluzione di un sistema dinamico dipendente da parametri (i "controlli"), in modo che tale sistema si comporti in un modo prefissato e, in qualche senso, "ottimale". Per questo motivo, tale teoria è di fondamentale importanza nella progettazione di macchine, dispositivi elettrici ed elettronici, e nella regolazione di sistemi complessi. I problemi di controllabilità e controllo ottimale si distinguono, a seconda del tipo di equazioni differenziali che li descrivono, in lineari e non lineari. Per i primi esiste un'ampia gamma di risultati e criteri (di controllabilità, accessibilità, stabilità), nonchè di metodi espliciti di calcolo dei controlli ottimali, basati su tecniche di algebra lineare, calcolo operazionale, analisi funzionale, ecc.*
*Dei problemi lineari ci si occuperà brevemente nel corso dell'attività didattica, mentre invece ci si soffermerà maggiormente sul controllo non lineare, secondo un approccio geometrico differenziale che negli ultimi decenni si è dimostrato molto fruttuoso. In effetti, un sistema di controllo è una famiglia di campi vettoriali parametrizzata dai controlli, e le questioni di accessibilità e controllabilità si traducono naturalmente in problemi d'integrabilità di tale famiglia, che si possono affrontare e risolvere con gli strumenti standard del calcolo differenziale su varietà (parentesi di Lie, teorema di Frobenius, distribuzioni derivate, integrazione dei flussi, ecc.); il risultato fondamentale per questa parte dell'attività didattica è il teorema delle orbite di Süssmann, che studieremo in dettaglio e di cui daremo alcune applicazioni.*
*Per quanto riguarda il controllo ottimale, il risultato chiave è il famoso Principio del Massimo di Pontryagin, di cui studieremo una formulazione invariante in termini di geometria simplettica e formalismo hamiltoniano; applicheremo poi tale principio alla risoluzione di vari problemi concreti.*
*Tempo permettendo, dedicheremo la parte finale dell'attività allo studio di casi speciali ma importanti, come il controllo su gruppi di Lie o le geodetiche in geometria sub-riemanniana.*

Testi di riferimento:

- Agrachev, Y. Sachkov, Control theory from the geometric viewpoint, Springer.
- Isidori, Nonlinear control systems, Springer.
- M. Bloch, Nonholonomic mechanics and control, Springer.

Semestre: 1° SEMESTRE, II ANNO.

## Varietà con Bordo e Teorema di Stokes

Docente: Luca Vitagliano

Descrizione: *La Geometria Differenziale formalizza l'idea di un calcolo differenziale indipendente dalla scelta delle coordinate. Anche la nozione di integrale definito ha una natura intrinseca. Un'analisi attenta rivela che gli integrandi, cioè gli oggetti da integrare, non sono funzioni, ma forme differenziali di grado massimo su una varietà differenziabile, e l'integrale può essere definito in modo invariante sotto cambi di coordinate e, più in generale, di diffeomorfismi. In questo contesto, il Teorema di Stokes gioca un ruolo speciale. Si tratta di una vasta generalizzazione del Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale (formula di Newton- Leibniz) che coinvolge una nuova classe di oggetti geometrici: le varietà con bordo. Lo scopo del corso è triplice: 1) introdurre le varietà con bordo, 2) costruire la teoria dell'integrale su varietà con bordo orientabili e orientate e 3) dimostrare il Teorema di Stokes. Durante le lezioni frontali saranno discusse le idee alla base di tutti e tre questi aspetti. Nella parte di studio autonomo saranno approfonditi i dettagli tecnici.*

Testi di Riferimento:

- J. M. Lee, Introduction to Smooth Manifolds, Springer.
- P. W. Michor, Topics in Differential Geometry, AMS.
- L. Vitagliano, A Primer on Smooth Manifolds, WS.

Semestre: 2° SEMESTRE, I ANNO.

# Settore MATH-03/A: Analisi Matematica

## Sistemi Dinamici e Applicazioni

<u>Docente</u>: Abdelaziz Rhandi

<u>Descrizione</u>: *La teoria dei sistemi dinamici studia i processi che evolvono nel tempo. La descrizione di questi processi è data in termini di equazioni alle differenze o equazioni differenziali, o iterazioni di mappe.*
*La definizione di sistema dinamico comprende tre componenti:*
*• Lo spazio degli stati (chiamato anche spazio delle fasi);*
*• Il tempo;*
*• Legge dell'evoluzione.*
*I. Lo spazio degli stati è un insieme i cui elementi (chiamati "punti") presentano possibili fasi del sistema in ogni istante del tempo.*
*II. Il tempo può essere discreto, il cui insieme di valori è l'insieme dei numeri interi, oppure continuo, il cui insieme di valori è l'insieme dei numeri reali.*
*III. La legge dell'evoluzione è la regola che ci permette, se conosciamo lo stato del sistema in un dato momento, di determinare lo stato del sistema in qualsiasi altro momento. (L'esistenza di questa legge equivale al presupposto che il nostro processo sia deterministico nel passato e nel futuro.)*
*Struttura del corso:*
*1. Introduzione e definizioni di base*
*2. Punti fissi dei flussi in* $R$*!*
*3. Stabilità*
*4. Esistenza e stabilità delle orbite periodiche in* $R$*!*
*5. Biforcazioni dei flussi*
*6. Punti fissi e biforcazioni delle mappe*
*7. Introduzione alla teoria del caos*
*Saranno studiati esempi di applicazioni di tipo:*
*• Il modello logistico della popolazione*
*• Sistemi predatore-preda*
*• Specie competitive*
*• Il sistema di Lorenz e di Rössler.*

<u>Testi di riferimento</u>:

- K. T. Alligood, T. D. Sauer, J. A. Yorke, CHAOS: An Introduction to Dynamical Systems, Springer ,1996.
- B. Hasselblatt, A. Katok, A First Course in Dynamics, Cambridge University Press, 2003.
- M. W. Hirsch, S. Smale, R. L. Devaney, Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos, Academic Press Elsevier (Third Edition), 2013.
- Lasota, M. C. Mackey, Probabilistic Properties of Deterministic Systems, Cambridge University Press 1985.

<u>Semestre</u>: 1° SEMESTRE, II ANNO.

## Trasformate Integrali e Applicazioni

Docente: Lyoubomira Softova

Descrizione:

*1. Serie di Fourier e passaggio alla trasformata di Fourier, proprietà e comportamento con altri operatori, fenomeno di Gibbs e principio di indeterminazione di Heisenberg ed applicazioni alla Statistica, risoluzione di equazioni integrali e di equazioni differenziali alle derivate parziali provenienti dall'ambiente fisico-musicale-finanziario.*

*2. Serie di potenze e passaggio alla trasformata di Laplace, proprietà e comportamento con altri operatori, condizioni di esistenza, convoluzioni e risultati affini, antitrasformata di Laplace, risoluzione di equazioni differenziali ordinarie e di equazioni integrali, calcolo di particolari integrali definiti e serie provenienti da contesti storici.*

*3. Trasformata di Hilbert e trasformata di Stieltjes, proprietà e comportamento con altri operatori, trasformata di Hilbert nel piano complesso, espansione asintotica e applicazioni, teorema di inversione della trasformata di Stieltjes, applicazioni e generalizzazioni.*

Testi di riferimento:

- W. A. Adkins, M. G. Davidson, Ordinary Differential Equations, Undergraduate Text in Mathematics, Springer Science & Business Media, 2012.
- L. Debnath, D. Bhatta, Integral Transforms and their Applications, Chapman and Hall/CRC, Third Edition, 2014.
- J. L. Schiff, The Laplace Transform: Theory and Applications, Springer-Verlag New York Inc., 1999.
- M. A. Pinsky, Partial Differential Equations and Boundary-Value Problems with Applications, Pure & Applied Undergraduate Texts 15, Providence American Mathematical Society, 2011.

Semestre: 2° SEMESTRE, II ANNO.

## Analisi Convessa

Docente: Antonio Vitolo

Descrizione:

*1. Insiemi convessi. Iperpiani e semispazi. Separazione di insiemi convessi. Teoremi di rappresentazione. Inviluppi convessi.*
*2. Funzioni convesse. Epigrafici. Funzioni semicontinue inferiormente. Inviluppi di funzioni affini continue. Regolarizzazione.*
*3. Funzioni polari. Dualità. Sottodifferenziabilità. Differenziabilità alla Gâteaux.*
*4. Esistenza dei minimi. Caratterizzazione delle soluzioni.*
*5. Il problema primale e il problema duale. Relazioni di estremalità Lagrangiane e punti di scelta. Applicazioni a problemi di ottimizzazione.*

Testi di riferimento:

- P. Acquistapace, Appunti di Analisi Convessa, https://people.dm.unipi.it/~acquistp/anacon.pdf
- H. Brezis, Analisi funzionale, Liguori Editore.
- Ekeland, R. Temam, Convex Analysis and Variational Problems, North-Holland.
- C. Saccon, Appunti per il corso di Analisi Convessa, http://users.dma.unipi.it/saccon/DIDA/ACONV/aconv.pdf

Semestre: 1° SEMESTRE, II ANNO.

# Settore MATH-03/B: Probabilità e Statistica Matematica

## Passeggiate Aleatorie: Metodi Analitici e Computazionali

Docente: Serena Spina

Descrizione: *Le passeggiate aleatorie si prestano a descrivere diversi fenomeni del mondo reale, come, ad esempio, l'evoluzione di epidemie, di notizie e dinamiche delle popolazioni, il movimento di particelle di interesse fisico, chimico e biologico. Si studieranno i principali aspetti teorici delle passeggiate aleatorie e ci si focalizzerà anche sul problema del tempo di primo passaggio, dando esempi di applicazioni. Infine, verranno dati i rudimenti del software R per simulare le passeggiate aleatorie di interesse, con il metodo Monte Carlo.*

Testi di riferimento:

- G. F. Lawler, V. Limic., Random Walk: A Modern Introduction, Cambridge University Press, 2010.
- R. P. Dobrow, Introduction to stochastic processes with R, Wiley, 2016.

Semestre: 2° SEMESTRE, I ANNO.

## Operatori Non Locali in Probabilità

Docente**:** Alessandra Meoli

Descrizione: *A partire dalla fine degli anni Novanta si è sviluppato un settore di ricerca che si ripropone di applicare il calcolo frazionario, cioè la teoria sulla derivazione e sull'integrazione di ordine non intero, alle equazioni della fisica matematica, sostituendo alle derivate intere di varie equazioni le derivate di ordine frazionario. Il corso si propone di studiare le interpretazioni probabilistiche di alcune equazioni classiche della fisica matematica estese al caso frazionario, come ad esempio la relaxation equation e la fractional diffusion equation.*

Testi di riferimento:

- *B. Jin, Fractional differential equations, Springer International Publishing, 2021.*
- E. Orsingher, L. Beghin, (2009), Fractional diffusion equations and processes with randomly-varying time, Annals of Probability, 37 (1), 206-249.
- L. Beghin, E. Orsingher, (2010), Poisson-type processes governed by fractional and higher-order recursive differential equations, Electronic Journal of Probability, 15, n.22, 684–709.

Semestre: 1° SEMESTRE, II ANNO.

## Applicazioni della Probabilità in Data Science

Docente: Antonio Di Crescenzo

Descrizione: *La probabilità ad alta dimensione offre informazioni dettagliate sul comportamento di vettori aleatori, matrici aleatorie, sottospazi aleatori e oggetti utilizzati per quantificare l'incertezza in dimensioni elevate. Basandosi su idee provenienti da varie discipline matematiche, si presta ad applicazioni non solo in matematica, ma anche in statistica, informatica teorica, elaborazione dei segnali, ottimizzazione e altro ancora.*
*L'obiettivo primario è quello di illustrare la teoria, gli strumenti essenziali e le applicazioni moderne della probabilità ad alta dimensione, facendo ricorso a disuguaglianze di concentrazione, distanze probabilistiche, elementi di calcolo combinatorio e metodi basati su processi stocastici.*

Testi di riferimento:

- R. Vershynin, High-Dimensional Probability. An Introduction with Applications in Data Science, Cambridge University Press, 2018.
- S. T. Rachevet al., The Methods of Distances in the Theory of Probability and Statistics, Springer, 2013.

Semestre: 2° SEMESTRE, II ANNO.

## Processi di Punto e Applicazioni

Docente**:** Barbara Martinucci

Descrizione: *L'obiettivo del corso è fornire le nozioni di base dei processi di punto, con particolare riferimento agli aspetti applicativi. Verranno illustrate le principali proprietà dei processi di punto, approfondendo, in particolare, il processo di Poisson ed i processi di rinnovo. Saranno inoltre presentati i metodi di campionamento associati ai processi di punto e discusse le principali operazioni su tali processi.*

Testi di riferimento:

- D. R. Cox, P. A. W. Lewis, The Statistical Analysis of Series of Events, Methuen's Monographs on Applied Probability and Statistics, London, 1966.
- D. R. Cox, V. Isham, Point Processes, Chapman & Hall, 1980.
- D. J. Daley, D . Vere-Jones, An Introduction to the Theory of Point Processes (Volume I: Elementary Theory And Methods). Springer-Verlag, New York, 2003.

Semestre: 2° SEMESTRE, II ANNO.

# Settore MATH-04/A: Fisica Matematica

## La Relatività Ristretta in Meccanica Analitica

Docenti: Francesca Passarella, Vincenzo Tibullo

Descrizione: *In questo corso si introdurrà la formulazione in termini di Meccanica Analitica della Relatività Ristretta. In particolare, si tratteranno i seguenti argomenti:*

- *richiami di Relatività Ristretta*
- *il tempo come coordinata estesa*
- *funzione lagrangiana estesa*
- *equazioni di Lagrange estese*
- *ridondanza delle equazioni di Lagrange estese*
- *equazioni di Hamilton estese*
- *parentesi di Poisson con il tempo come coordinata*
- *principio di Hamilton esteso*

Testi di riferimento:

- Dispense del docente
- N. M. J . Woodhouse, Special Relativity, Springer
- O. D. Johns, Analytical Mechanics for Relativity in Quantum Mechanics, Oxford University Press.

Semestre: 2° SEMESTRE, I ANNO.

## Propagazione per Onde

Docenti: Francesca Passarella, Vincenzo Tibullo

Descrizione: *In questo corso si introdurranno i concetti fondamentali della propagazione per onde nel vuoto e nei mezzi continui. Gli argomenti del corso sono:*

- *fenomeni oscillatori*
- *equazione delle onde*
- *vibrazioni trasverse di corde*
- *onde nei liquidi*
- *onde sonore*
- *onde nei mezzi elastici*

Testi di riferimento:

- Dispense del docente
- S. Forte, L. Preziosi, M. Vianello, Meccanica dei Continui, Springer.
- J. D. Achenbach, Wave Propagation in Elastic Solids, North Holland
- J. L. Davis, Wave Propagation in Solids and Fluids, Springer-Verlag

Semestre: 2° SEMESTRE, II ANNO.

# Settore MATH-05/A: Analisi Numerica

## Metodi Matriciali per l'Analisi delle Reti Complesse

Docente: Dajana Conte
Descrizione: *Grafi e matrici, connettività e reti di adiacenza. Misure di centralità e comunicabilità, somiglianza e distanza basate su tecniche spettrali e funzioni di matrici. Definizione di funzioni di matrici. Applicazioni alla risoluzione numerica di equazioni differenziali. Calcolo di funzioni di matrici: sviluppi in serie, approssimazioni razionali, iterazioni matriciali. Esponenziale di matrice. Funzione di matrice per un vettore: metodi basati su sottospazi di Krylov, formule di quadratura ed equazioni differenziali.Sistemi dinamici per lo studio di evoluzione di reti. Sistemi dinamici su reti.*

Testi di riferimento:

- N. J. Higham, Functions of Matrices, Theory and Computation, SIAM, 2008.
- M. Benzi, P. Boito, Matrix functions in network analysis, GAMM-Mitteilungen, 43(3):e202000012 (2020).

Semestre: 2° SEMESTRE, II ANNO.

**Risoluzione Numerica di PDE di Avvezione-Reazione-Diffusione Dipendenti dal Tempo**

Docente: Dajana Conte

Descrizione: *Modelli basati su PDE di Avvezione-Reazione-Diffusione: chimica del trasporto degli inquinanti, problemi di chemiotassi 2D, modello di angiogenesi. Discretizzazione spaziale mediante differenze finite. Il metodo delle linee, stabilità e convergenza. Proprietà di monotonia e positività. Differenze finite non standard. Metodi di splitting: splittings di Lie-Trotter e Strang. Metodi LOD: splitting di Eulero e trapezoidale. Tecniche di boundary corrections. Aspetti legati alla stabilità: metodi IMEX, metodi TASE. Discretizzazioni numeriche basate su matrici per PDEs di reazione-diffusione.*

Testi di riferimento:

- W. Hundsdorfer, J. G. Verwer, Numerical Solution of Time-Dependent Advection Diffusion Reaction Equations, Springer (2003, 2007).

Semestre: 1° SEMESTRE, II ANNO.

## Introduzione al Calcolo Frazionario

Docente: Angelamaria Cardone

Descrizione: *Il calcolo frazionario ha per oggetto di studio operatori differenziali e integrali di ordine non intero. Sebbene la sua storia abbia avuto inizio già due secoli orsono, solo negli ultimi decenni si è sviluppato un crescente interesse verso questa tematica, grazie ai numerosi modelli in svariati ambiti delle scienze naturali e applicate.*
*Il corso intende fornire le nozioni di base del calcolo frazionario, quali le definizioni di integrali e derivate frazionarie, la corretta posizione di problemi differenziali frazionari ai valori iniziali.*
*Poiché solo in pochissimi casi la soluzione analitica di equazioni differenziali frazionarie è nota ed è computazionalmente utilizzabile, risulta indispensabile ricorrere alla risoluzione numerica. Pertanto, parte del corso sarà dedicata ai più popolari metodi numerici proposti in letteratura.*

Testi di riferimento:

- K. Diethelm, N. J. Ford, A. D. Freed. Detailed error analysis for a fractional Adams method. Numerical algorithms 36.1 (2004): 31-52.
- R. Garrappa, "Trapezoidal methods for fractional differential equations: Theoretical and computational aspects." Math. Comput. Simul. 110 (2015): 96-112.
- K. Diethelm, et al. "Pitfalls in fast numerical solvers for fractional differential equations." J. Comput. Appl. Math. 186.2 (2006): 482-503.
- Podlubny, "Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications." Mathematics in science and engineering 198 (1999): 1-340.
- K. B. Oldham, J. Spanier. "The Fractional Calculus Theory and Applications of Differentiation and Integration to Arbitrary Order", Academic Press Inc., 1974.

Semestre: 1° SEMESTRE, II ANNO.

## Metodi agli Elementi Finiti per Equazioni alle Derivate Parziali Ellittiche

Docente**:** Gianluca Frasca Caccia

Descrizione: *Tra i diversi metodi numerici per la risoluzione di equazioni alle derivate parziali, il metodo agli elementi finiti è tra quelli che meglio si prestano alla risoluzione di modelli che sorgono in contesti applicativi.*
*Il grande vantaggio di questi metodi si basa sulla capacità di trattare modelli definiti su domini di forma complessa (ad esempio, la trasmissione del calore nel motore di un aereo), domini di forma variabile (ad esempio, la corrosione di un metallo), e in situazioni che richiedono una maggiore accuratezza in solo una parte del dominio (ad esempio, in un crash test di un veicolo si richiede maggiore accuratezza nella zona vicina alla superficie impattante).*
*Il corso verterà sullo studio delle nozioni di base dei metodi, la definizione di griglie opportune sul dominio considerato, la scelta di funzioni approssimanti definite a tratti (spesso polinomi), l'analisi dell'accuratezza delle soluzioni, e l'implementazione dei metodi studiati in Matlab o Python per la risoluzione di problemi ellittici.*

Testi di riferimento:

- Quarteroni, Modellistica numerica per problemi differenziali, Springer.
- J. Davies, The Finite Element Method. An introduction with Partial Differential Equations (2nd Ed.), Oxford University Press.

Semestre: 2° SEMESTRE, II ANNO.

# Settore MATH-06/A: Ricerca Operativa

## Varianti NP-Difficili di Problemi di Ottimizzazione su Grafi

Docente: Raffaele Cerulli

Descrizione**:** *Oggetto di questo corso saranno classici problemi di ottimizzazione definiti su grafi caratterizzati dalla presenza di vincoli aggiuntivi (di conflitto tra gli elementi della soluzione, di cardinalità sul numero/ distribuzione di opportune caratteristiche (labels), ecc.) che rendono i problemi complessi da risolvere. Per ognuno dei problemi studiati verranno analizzati sia metodi risolutivi basati su modelli matematici opportunamente definiti sia approcci meta-euristici e math-euristici. Per ogni modello analizzato verrà illustrata una possibile implementazione pe la sua soluzione.*

Testi di riferimento:

- H. Broersma, X. Li (1997). Spanning trees with many or few colors in edge-colored graphs. Discussiones Mathematicae Graph Theory 17 (2), 259-269.
- F. Carrabs, C. Cerrone, R. Pentangelo (2019). A multiethnic genetic approach for the minimum conflict weighted spanning tree problem. Networks 74 (2), 134 147.
- Z. Suvak, K. Altnel, and N. Aras (2020). Exact solution algorithms for the maximum flow problem with additional conflict constraints. European Journal of Operational Research 287 (2), 410 437.

Semestre: 1° SEMESTRE, II ANNO.

**Problemi di Programmazione Lineare Intera Mista e Varianti con Inesattezza sui Dati**

Docente: Ciriaco D’Ambrosio

Descrizione: *Il corso si propone di approfondire lo studio e la risoluzione di alcuni classici problemi di programmazione lineare continua, lineare intera mista e loro varianti (es. problema dello zaino nella formulazione classica e nella sua variante con insiemi forfeit) e di introdurre lo studio di modelli che considerano l’incertezza come un elemento essenziale della modellazione.*
*Per i modelli presentati sarà mostrata una implementazione (per esempio in C++) che consenta, tramite l’utilizzo del risolutore CPLEX, di ottenere la soluzione del modello su istanze di piccole / medie dimensioni.*

Testi di riferimento:

- G. L. Nemhauser, L. A. Wolsey, Integer and Combinatorial Optimization, 1999.
- M. Fiedler, J. Nedoma, J. Ramik, J. Rohn, K. Zimmermann, Linear Optimization Problems with inexact data, 2006.
- C. D'Ambrosio, F. Laureana, A. Raiconi, G. Vitale, The Knapsack Problem with forfeit sets, Computers and Operations Research, 151, (2023).
- F. Carrabs, R. Cerulli, C. D'Ambrosio, F. Della Croce, M. Gentili, An improved heuristic approach for the interval immune transportation problem, Omega (United Kingdom), 104, (2021).
- Libri, Appunti e Articoli scientifici indicati dal docente.

Semestre: 2° SEMESTRE, I ANNO.